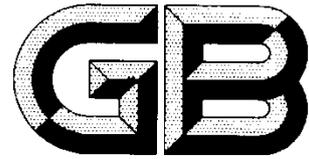


ICS 01. 060
CCS A22



中华人民共和国国家标准

GB/T 310x.2—xxxx
代替GB/T 3102.11-1993

量和单位 第2部分：数学

Quantities and units — Part 2: Mathematics
(ISO 80000-2:2019 Quantities and units – Part 2: Mathematics, IDT)
(征求意见稿)

在提交反馈意见时，请将您知道的相关专利连同支持性文件一并附上。

××××-××-××发布

××××-××-××实施

中华人民共和国国家市场监督管理总局
中国国家标准化管理委员会 发布

目 次

前言	错误!未定义书签。
引言	II
1. 范围	1
2. 引用标准	1
3. 术语和定义	1
4. 变量, 函数和算子	1
5. 数理逻辑	2
6. 集合	2
7. 标准数集和区间	5
8. 杂类符号	6
9. 初等几何	8
10. 运算符号	9
11. 组合数学	11
12. 函数	12
13. 指数函数和对数函数	16
14. 三角函数和双曲函数	17
15. 复数	19
16. 矩阵	19
17. 坐标系	21
18. 标量, 向量和张量	23
19. 变换	26
20. 特殊函数	27
参考文献	33

前 言

本文件按照 GB/T 1.1-2020《标准化工作导则 第1部分：标准化文件的结构和起草规则》的规定起草。

本文件等同采用国际标准 ISO 80000-2: 2019《量和单位 第2部分：数学》。

本文件替代 GB/T 3102.11-1993《物理科学和技术中使用的数学符号》。本文件与 GB/T 3102.11-1993 相比，除结构调整和编辑性改动外，主要技术变化如下：

适当修改了其中一些章节的名称，例如：将“几何符号”修改为“初等几何”、“矢量和张量符号”修改为“标量，向量和张量”等。对原标准中不再常用的符号进行了删减，例如：“三角形符号”、“平行四边形符号”、“圆符号”等，并适当调整了原各章节的顺序。新增“标准数集和区间”、“组合数学”、“变换”三个章节。

请注意本文件的某些内容有可能涉及专利，本文件的发布机构不应承担识别这些专利的责任。

本文件由全国量和单位标准化技术委员会（SAC/TC16）提出并归口。

本文件起草单位：中国计量科学研究院等。

本文件主要起草人：

本文件所代替的历次版本发布情况为：

- GB/T 3102.11-82， 1982 年首次发布；
- GB/T 3102.11-1986， 1986 年第一次修订；
- GB/T 3102.11-1993， 1994 年第二次修订。

引 言

科学领域量和单位的规范性是我国科学社会发展的基石,为科学的发展提供了科学的依据。为进一步促进科学技术领域量和单位的名称、符号、定义和单位在我国科研、教学、国防安全、生产经营和新闻出版等领域的规范应用,更好支撑相关领域国际交流,服务我国科技创新和国民经济发展,制定本文件。

GB/T 3102《量和单位》旨在规范量和单位的名称、符号、定义等内容,拟由以下 13 个部分构成:

——第 1 部分:总则。目的在于提供了有关量、量纲系统、单位、量和单位符号以及协调单位系统的一般信息和定义,特别是国际单位制(SI)。

——第 2 部分:数学。目的在于规定在自然科学和技术领域以及使用数学的其他领域的数学符号和表达式,解释其含义,并给出备注及示例,促进在科学技术领域的规范应用。

——第 3 部分:空间和时间。目的在于规范空间和时间量的名称、符号、定义和单位,以适应我国国民经济、文化教育事业的发展,以及推进科学技术进步和扩大国际经济、文化交流的需要。

——第 4 部分:力学。目的在于规定力学量的名称、符号、定义和单位以及适当情况下的部分转换系数,促进其在科学技术等领域的规范应用。

——第 5 部分:热力学。目的在于规定热力学量的名称、符号、定义和单位,以及一些情况下的转换系数,促进其在科研、教学、生产经营、新闻出版等领域的规范应用。

——第 6 部分:电磁学。目的在于规定电磁学量的名称、符号、定义和单位以及适当情况下的部分转换系数,促进其在科学技术等领域的规范应用。

——第 7 部分:光和辐射。目的在于规定波长约为 1 nm 至 1 mm 范围内的光和光辐射的量的名称、符号、定义和单位。

——第 8 部分:声学。目的在于规范声学量的名称、符号、定义和单位,促进其在科学技术领域的规范应用。

——第 9 部分:物理化学和分子物理学。目的在于规范物理化学和分子物理量的名称、符号、定义和单位,以及合适的单位转换部分,从而使科学术语适应我国经济建设的发展,更全面和完善地服务于国内文化教育、科学技术发展,促进我国市场经济与国际融合。

——第 10 部分:原子物理学和核物理学。目的在于规范原子和核物理学中使用的量的名称、符号、定义和单位。在适当的情况下,还给出了转换因子。

——第 11 部分:特征数。目的在于规范用来描述传递现象的一些常用特征数的名称和符号。

——第 12 部分:凝聚态物理学。目的在于规范凝聚态物理学中各种量的名称、符号、定义和单位。在适当的情况下,还给出了转换因子。

——第 13 部分:信息科学与技术。目的在于规范信息科学与技术中各种量的名称、符号、定义和单位。

本文件符合我国法律《中华人民共和国计量法》《中华人民共和国标准化法》,并与我国行政法规《国务院关于在我国统一实行法定计量单位的命令》《全面推行我国法定计量单位的意见》的要求相协调。

量和单位 第2部分：数学

1. 范围

本文件规定了数学符号，解释了它们的含义，并给出了对等语和应用。
本文件主要用于自然科学和技术领域，但也适用于使用数学的其他领域。

2. 引用标准

本文件引用的下列文件，其全部或部分内容构成本文件的要求。凡是注明日期的参考文献，只适用于所引用的版本。对于未注明日期的参考文献，适用于参考文件（包括任何修订在内）的最新版。

ISO 80000-1，量和单位 - 第一部分：总则

3. 术语和定义

表 1 至表 16 给出了不同数学领域中使用的符号和表达式。

ISO 和 IEC 维护的标准化术语数据库，请见以下网址：

- ISO 在线浏览平台：可访问 <https://www.iso.org/obp>
- IEC Electropedia：可访问 <http://www.electropedia.org/>

4. 变量，函数和算子

按照惯例，不同的字母表示不同的实体，例如用 x, y, \dots 表示数字或给定集合中的元素，用 f, g 表示函数等。这样一来，公式更具可读性，并有助于形成适当的上下文语境。

诸如 x, y 等变量，以及例如 $\sum_i x_i$ 中的序号 i 以斜体排印。例如 a, b 等参数，在特定的上下文中可以被认为是常量，以斜体印刷。同样适用于例如 f, g 等函数。

然而，例如 \sin, \exp, \ln, Γ 等定义明确且不取决于上下文的函数以正体排印，数值恒定的数学常量以正体排印，例如 $e = 2,718281828 \dots$ ； $\pi = 3,141592 \dots$ ； $i^2 = -1$ 。良定义的算子也以正体印刷，例如 div ， δx 中的 δ 以及 df/dx 中的每个 d 。一些变形用特殊的大写字母表示（参阅 19 章：变换）。

数字总是以正体印刷，例如 351204；1,32；7/8。

在 +, -, / 等二元运算符的前面和后面加上窄空格。该规则不适用于一元运算符的情况，就像 -17,3。

函数的参数写在函数符号后的括号中，函数符号和第一个括号之间没有空格，例如 $f(x)$ ， $\cos(\omega t + \varphi)$ 。如果函数符号由两个或两个以上的字母组成，且参数不包含运算符，例如 +, -, \times 或 /，参数周围的括号可以省略。在上述情况下，函数符号和参数之间应该有一个窄空格，例如 $\text{int } 2,4$ ； $\sin n\pi$ ； $\text{arcosh } 2A$ ； $E_i x$ 。

若存在任何混淆的风险，则应该始终插入括号。例如，写为 $\cos(x) + y$ ；不要写为 $\cos x + y$ ，否则会误认为是 $\cos(x + y)$ 。

逗号、分号或其他适当的符号可以用作数字或表达式之间的分隔符。通常首选逗号，除非数字中使用小数逗号。

若一个表达式或方程必须写成两行或多行，则应使用以下方法：

— 将换行符直接置于=, +, -, ±, 或 \mp 其中一个符号之前, 或者如有必要, 直接置于 \times , \cdot , 或/其中一个符号之前。

符号不应在换行符前后出现两次; 例如两个减号可能会导致符号错误。如果可能的话, 括号内的表达式不应出现换行符。

5. 数理逻辑

表 1 — 数理逻辑中的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-5.1	$p \wedge q$	p 合取 q , p 和 q conjunction of p and q , p and q	
2-5.2	$p \vee q$	p 折取 q , p 或 q disjunction of p and q , p or q	“或”是包含关系, 即 p 或 q 中有一个为真, 或者两者同时为真, 则 $p \vee q$ 为真。
2-5.3	$\neg p$	p 的否定, 非 p negation of p , not p	
2-5.4	$p \Rightarrow q$	p 蕴含 q , 如果 p , 则 q p implies q , if p , then q	$q \Leftarrow p$ 与 $p \Rightarrow q$ 意义相同。 \Rightarrow 是 (严格) 蕴含符号。 \rightarrow 同样用作 (实质) 蕴含符号。
2-5.5	$p \Leftrightarrow q$	p 等价于 q p is equivalent to q	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ 与 $p \Leftrightarrow q$ 意义相同。 \Leftrightarrow 是 (严格等价) 符号。 \leftrightarrow 同样作为 (实质) 等价符号。
2-5.6	$\forall x \in A p(x)$	对于 A 中的任意 x , 都有 $p(x)$ 成立 for every x belonging to A , the proposition $p(x)$ is true	如果集合 A 在逻辑关系中已知, 可以使用符号 $\forall x p(x)$ 。 \forall 是全称量词。 对于 $x \in A$, 详见 2-6.1。
2-5.7	$\exists x \in A p(x)$	存在 M 中的一个 x , 使 $p(x)$ 成立 there exists an x belonging to A for which $p(x)$ is true	如果集合 A 在逻辑关系中已知, 可以使用符号 $\exists x p(x)$ 。 \exists 是存在量词。 对于 $x \in A$, 详见 2-6.1。 $\exists^1 x p(x)$ 用于表示有且只有一个元素使 $p(x)$ 成立。 $\exists!$ 同样被用于表示 \exists^1 。

6. 集合

表 2 — 集合的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-6.1	$x \in A$	x 属于 A ,	$A \ni x$ 与 $x \in A$ 意义相同。

		x 是集合 A 中的元素 x belongs to A , x is an element of the set A	
2-6.2	$y \notin A$	y 不属于 A , y 不是集合 A 中的元素 y does not belong to A , y is not an element of the set A	$A \ni y$ 与 $y \in A$ 意义相同。 否定划线可以是垂直线。
2-6.3	$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	含有 x_1, x_2, \dots, x_n 元素的集合 set with elements x_1, x_2, \dots, x_n	$\{x_i \mid i \in I\}$, I 为下角标的集合。
2-6.4	$\{x \in A \mid p(x)\}$	A 集合中所有元素使 $p(x)$ 命题为真 set of those elements of A for which the proposition $p(x)$ is true	示例: $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 5\}$ 如果集合 A 在逻辑关系中已知, 符号 $\{x \mid p(x)\}$ 可被使用 (如, 已知 x 属于实数集, 则 $\{x \mid x \geq 5\}$)。可将垂直线替换成冒号, 作为分隔符. $\{x \in A : p(x)\}$
2-6.5	card A $ A $	集合 A 的元素个数, 集合 A 的基数 number of elements in A , cardinality of A	基数可以为超限数。 $ $ 符号可用作表示实数的绝对值 (详见 2-10.16)、复数的模量 (详见 2-15.4) 以及向量大小 (详见 2-18.4)。
2-6.6	\emptyset $\{\}$	空集 the empty set	
2-6.7	$B \subseteq A$	B 包含于 A , B 是 A 的子集 B is included in A , B is a subset of A	B 集合中的所有元素属于 A 集合, \subset 也是包含于符号, 详见 2-6.8。 $A \supseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 意义相同。
2-6.8	$B \subset A$	B 真包含于 A , B 是 A 的真子集 B is properly included in A , B is a proper subset of A	B 集合中所有元素属于 A 集合, 但 A 集合至少有一个元素不属于 B 集合。 若 \subset 在条目 2-6.7 中使用, 则 \subsetneq 在条目 2-6.8 中使用。 $A \supset B$ 与 $B \subset A$ 意义相同。
2-6.9	$A \cup B$	A 与 B 的并集 union of A and B	并集中的元素属于 A 集合或 B 集合。 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2-6.10	$A \cap B$	A 与 B 的交集 intersection of A and B	交集的元素既属于 A 集合又属于 B 集合。 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

2-6.11	$\bigcup_{i=1}^n A_i$	<p>集合A_1, A_2, \dots, A_n的并集</p> $\bigcup_{i=1}^n A_j = A_1 \cup \dots \cup A_n$ <p>union of the sets A_1, A_2, \dots, A_n</p> $\bigcup_{i=1}^n A_j = A_1 \cup \dots \cup A_n$	<p>并集中的元素属于集合A_1, A_2, \dots, A_n中的其中之一。</p> <p>也使用$\bigcup_{i=1}^n$, $\bigcup_{i \in I}$ 和 $\bigcup_{i \in I}$ 表示为集合的并集, 其中I为下角标的集合.</p>
2-6.12	$\bigcap_{i=1}^n A_i$	<p>集合A_1, A_2, \dots, A_n的交集</p> $\bigcap_{i=1}^n A_j = A_1 \cap \dots \cap A_n$ <p>intersection of the sets A_1, A_2, \dots, A_n</p> $\bigcap_{i=1}^n A_j = A_1 \cap \dots \cap A_n$	<p>交集集中的元素属于所有集合A_1, A_2, \dots, A_n</p> <p>也使用$\bigcap_{i=1}^n$, $\bigcap_{i \in I}$ 和 $\bigcap_{i \in I}$ 表示为集合的交集, 其中I为下角标的集合.</p>
2-6.13	$A \setminus B$	<p>集合A与集合B的差, 集合A减B difference of A and B, A minus B</p>	<p>差集元素属于集合A, 但不属于集合B</p> $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ <p>$A - B$不能作为符号表示.</p> <p>当B是A的子集时, $C_A B$可用于表示差集, 若A在逻辑关系中已知, A可以省略.</p>
2-6.14	(a, b)	<p>有序数对 a, b, 有序对偶 a, b order pair a, b, couple a, b</p>	<p>当且仅当$a = c$并且$b = d$, 则$(a, b) = (c, d)$。</p> <p>若逗号与十进制符号混淆, 分号(;)或者划线()可用作分隔符.</p>
2-6.15	(a_1, a_2, \dots, a_n)	<p>有序 n 元组 ordered n-tuple</p>	<p>详见 2-6.14 备注。</p>
2-6.16	$A \times B$	<p>A 与 B 的笛卡尔积 Cartesian product of the sets A and B</p>	<p>所有由$a \in A$与$b \in B$组成的有序偶(a, b)的集。</p> $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
2-6.17	$\prod_{i=1}^n A_i$	<p>集合A_1, A_2, \dots, A_n的笛卡尔积</p> $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$ <p>Cartesian product of</p>	<p>所有由$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$组成的有序 n 元组(x_1, x_2, \dots, x_n)。</p> <p>$A \times A \times \dots \times A$记成$A^n$, 其中 n 为乘积中的因子数。</p>

		the sets A_1, A_2, \dots, A_n $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$	
2-6.18	id_A	集合 A 的恒等式 $A \times A$ 的对角集 identity relation on set A , diagonal of $A \times A$	id_A 是所有点对 (x, x) 的集合, 其中 $x \in A$ 。 如果集合 A 在逻辑关系中已知, 则下标 A 可以省略。

7. 标准数集和区间

表 3 标准数集和区间的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-7.1	\mathbf{N}	自然数集; 非负整数集 the set of natural numbers, the set of positive integers and zero	$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ 需明确标注其他限制条件, 如下所示: $\mathbf{N}_{>5} = \{n \in \mathbf{N} \mid n > 5\}$ 也可用符号 \mathbf{IN} 和 \mathbf{N} 表示。
2-7.2	\mathbf{Z}	整数集 the set of integers	$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ $\mathbf{Z}^* = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \neq 0\}$ 需明确标注其他限制条件, 如下所示: $\mathbf{Z}_{>-3} = \{n \in \mathbf{Z} \mid n > -3\}$ 也可用符号 \mathbf{Z} 表示。
2-7.3	\mathbf{Q}	有理数集 the set of rational numbers	$\mathbf{Q}^* = \{r \in \mathbf{Q} \mid r \neq 0\}$ 需明确标注其他限制条件, 如下所示: $\mathbf{Q}_{<0} = \{r \in \mathbf{Q} \mid r < 0\}$ 也可用符号 \mathbf{Q} 和 \mathbf{Q} 表示。
2-7.4	\mathbf{R}	实数集 the set of real numbers	$\mathbf{R}^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$ 需明确标注其他限制条件, 如下所示: $\mathbf{R}_{>0} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ 也可用符号 \mathbf{IR} 和 \mathbf{R} 表示。
2-7.5	\mathbf{C}	复数集 the set of complex numbers	$\mathbf{C}^* = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 0\}$ 也可用符号 \mathbf{C} 表示。
2-7.6	\mathbf{P}	素数集 the set of prime numbers	$\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ 也可用符号 \mathbf{P} 表示。
2-7.7	$[a, b]$	由 a (含于内) 到 b (含于内) 的闭区间	$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$

		closed interval from a included to b included	
2-7.8	$(a, b]$	由 a (含于内) 到 b (不含) 的左半开区间 left half-open interval from a included to b excluded	$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ 也可用符号 $]a, b]$ 表示。
2-7.9	$[a, b)$	由 a (含于内) 到 b (不含) 的右半开区间 right half-open interval from a included to b excluded	$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ 也可用符号 $[a, b[$ 表示。
2-7.10	(a, b)	由 a (不含于内) 到 b (不含于内) 的开区间 open interval from a excluded to b excluded	$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ 也可用符号 $]a, b[$ 表示。
2-7.11	$(-\infty, b]$	截止于 b (含于内) 的右闭无界区间 closed unbounded interval up to b included	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$ 也可用符号 $] - \infty, b]$ 表示。
2-7.12	$(-\infty, b)$	截止于 b (不含于内) 的右开无界区间 open unbounded interval up to b excluded	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ 也可用符号 $] - \infty, b[$ 表示。
2-7.13	$[a, +\infty)$	起始于 a (含于内) 的左闭无界区间 closed unbounded interval onward from a included	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}$ 也可用符号 $[a, \infty)$, $[a, +\infty[$, $[a, \infty[$ 表示。
2-7.14	$(a, +\infty)$	起始于 a (不含于内) 的左闭无界区间 open unbounded interval onward from a excluded	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$ 也可用符号 (a, ∞) , $]a, +\infty[$, $]a, \infty[$ 表示。

8. 杂类符号

表 4 — 杂类符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-8.1	$a=b$	a 等于 b a is equal to b a equals to b	符号 \equiv 用于强调特定等式是恒等式, 即普遍保持恒等。 有关另一种含义, 详见 2-8.18。
2-8.2	$a \neq b$	a 不等于 b a is not equal to b	用于表示否定的划线可替换成垂直线。

2-8.3	$a:=b$	按定义 a 等于 b a is definition equal to b	示例 $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$, 式中 \mathbf{p} 为动量, m 为质量, \mathbf{v} 为速度。 也可用符号 $\stackrel{\text{def}}{=}$ 和 $\stackrel{\text{def}}{=}$ 表示。
2-8.4	$a\cong b$	a 相当于 b a is corresponds to b	示例 当 $E = kT$, 则 $1\text{eV} \cong 11604,5 \text{ K}$ 。 当 1 cm 在地图上相当于 10 km 长时, 可写成 $1 \text{ cm} \cong 10 \text{ km}$ 。 相当于不是对称关系。
2-8.5	$a \approx b$	a 约等于 b a is approximately equal to b	近似是否足够好取决于用户。包含等于在内。
2-8.6	$a \simeq b$	a 渐进等于 b a is asymptotically equal to b	例如 当 $x \rightarrow a$ 时, $\frac{1}{\sin(x-a)} \simeq \frac{1}{x-a}$ (若 $x \rightarrow a$, 详见 2-8.16。)
2-8.7	$a \sim b$	a 与 b 成正比 a is proportional to b	符号 \sim 也用于表示等价关系。 也可用符号 $a \propto b$ 表示。
2-8.8	$M \cong N$	M 与 N 同构 M is congruent to N M is isomorphic to N	M 和 N 为点集 (几何图形)。 \cong 也用于表示数学结构中的同构。
2-8.9	$a < b$	a 小于 b a is less than b	
2-8.10	$b > a$	b 大于 a b is greater than a	
2-8.11	$a \leq b$	a 小于或等于 b a is less than or equal to b	
2-8.12	$b \geq a$	b 大于或等于 a b is greater than or equal to a	
2-8.13	$a \ll b$	a 远小于 b a is much less than b	取决于与 b 相比, a 是否足够小。
2-8.14	$b \ll a$	b 远大于 a b is much greater than a	取决于与 a 相比, b 是否足够大。
2-8.15	∞	无穷 infinity	该符号不表示一个数, 而是表示与极限有关的表达式。 也用符号 $+\infty, -\infty$ 表示。

2-8.16	$x \rightarrow a$	x 趋近于 a x tends to a	这个符号出现在与极限有关的表达式中。 a 也可用 $\infty, +\infty, -\infty$ 表示。
2-8.17	$m \mid n$	m 除 n m divides n	对于整数 m 和 n : $\exists k \in \mathbf{Z} \quad m \cdot k = n$
2-8.18	$n \equiv k \pmod{m}$	n 与 k 的模数 m 同构 n is congruent to k modulo m	对于整数 n, k 和 m : $m \mid (n - k)$ 这个数论概念不能与本表 2-8.1 第 4 列中的恒等式混淆。
2-8.19	$(a+b)$ [$a+b$] { $a+b$ } < $a+b$ >	圆括号 parentheses 方括号 square brackets 大括号 braces 尖括号 angle brackets	考虑到括号和大括号在特定领域有特定含义, 建议仅用圆括号表示分组。圆括号表示分组不产生歧义。

9. 初等几何

表 5 — 初等几何中的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-9.1	$AB \parallel CD$	直线 AB 平行于直线 CD the straight line AB is parallel to the straight line CD	当点 A 和点 B 相连成直线 g , 点 C 和点 D 相连成直线 h 时, 可写成 $g \parallel h$ 表示平行。
2-9.2	$AB \perp CD$	直线 AB 垂直于直线 CD the straight line AB is perpendicular to the straight line CD	当点 A 和点 B 相连成直线 g , 点 C 和点 D 相连成直线 h 时, 可写作 $g \perp h$ 表示垂直。这两条直线在同一平面上相交。
2-9.3	$\sphericalangle ABC$	以 B 为顶角的三角形 ABC angle at vertex B in the triangle ABC	角没有方向, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA$, 且 $0 \leq \sphericalangle ABC \leq \pi$ rad。 包括旋转角在内的一般定义, 详见 ISO 80000-3。
2-9.4	\overline{AB}	线段 AB line segment from A to B	直线 AB 上从点 A 到点 B 之间的点的集合构成线段, 包括端点 A 和端点 B 。
2-9.5	\vec{AB}	向量 AB vector from A to B	当 $\vec{AB} = \vec{CD}$, 从 A 到 B 和从 C 到 D 具有相同的方向和距离, 但不满足 $A = C$ 和 $B = D$ 。
2-9.6	$d(A, B)$	从点 A 到点 B 的距离 distance between points A and B	可表示线段 \overline{AB} 长度的距离和向量 \vec{AB} 的大小。

10. 运算符号

表 6 — 数学运算的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-10.1	$a+b$	a 加 b a plus b	该运算的名称是加。符号+表示加号。
2-10.2	$a-b$	a 减 b a minus b	该运算的名称是减。符号-表示减号。
2-10.3	$a\pm b$	a 加或减 b a plus or minus b	将两个值组合到同一个表达式中。
2-10.4	$a\mp b$	a 减或加 b a minus or plus b	$-(a \pm b) = -a \mp b$
2-10.5	$a \cdot b$ $a \times b$ $a b$ ab	a 乘以 b a multiplied by b a times b	该运算的名称是乘。 用符号(\cdot)或(\times)表示乘号 当没有歧义时, 乘号可以省略 关于乘号的不同表达符号, 如(\cdot)或(\times), 详见 2-6.16, 2-6.17, 2-18.11, 2-18.12, 2-18.23 和 2-18.24。
2-10.6	$\frac{a}{b}$ a/b $a:b$	a 除以 b a divided by b	$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ 符号: 经常用于表示相同量纲量值的比率。 不应使用符号 \div 。
2-10.7	$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ a_1, a_2, \dots, a_n 的和 sum of a_1, a_2, \dots, a_n	也可以使用符号 $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_i a_i, \sum_i a_i$ 和 $\sum a_i$ 。
2-10.8	$\prod_{i=1}^n a_j$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ a_1, a_2, \dots, a_n 的乘积 product of a_1, a_2, \dots, a_n	也可以使用符号 $\prod_{i=1}^n a_i, \prod_i a_i, \prod_i a_i$ 和 $\prod a_i$ 。
2-10.9	a^p	a 的 p 次幂 a to the power p	a^2 读作 a 的平方; a^3 读作 a 的立方。
2-10.10	$a^{1/2}$ \sqrt{a}	a 的二分之一次幂, a 的平方根 a to the power 1/2 square root of a	如果 $a \geq 0$, 则 $\sqrt{a} > 0$ 。 应避免使用符号 \sqrt{a} 。 详见 2-10.11 的备注。
2-10.11	$a^{1/n}$ $\sqrt[n]{a}$	a 的 n 分之一次幂, a 的 n 次方根 a to the power 1/n n^{th} root of a	如果 $a \geq 0$, 则 $\sqrt[n]{a} \geq 0$ 。 符号避免写成 $n\sqrt{a}$ 。 当符号 $n\sqrt{\quad}$ 或 $\sqrt{\quad}$ 用于复合表达式中, 需要加上圆括号, 防止产生歧义。

2-10.12	\bar{x} $\langle x \rangle$ \bar{x}_a	x 的平均值, x 的算术平均 mean value of x , arithmetic mean of x	由其他方法得到的平均值是 —调和平均, 用下标h表示, —几何平均, 用下标g表示, —二次均值, 经常称作“均方根”, 用下标q或rms表示。 下标只能在表示算术平均时省略。 在数学中, \bar{x} 也用来表示 x 的复共轭; 参阅 2-15.6。
2-10.13	$\text{sgn } a$	a 的符号函数 signum a	对于实数 a : $\text{sgn } a = \begin{cases} 1 & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a = 0 \\ -1 & \text{if } a < 0 \end{cases}$ 另请参阅项 2-15.7。有时sgn 0未得到定义。
2-10.14	$\inf M$	M 的下确界 infimum of M	一个有下界非空数集的最大下界。
2-10.15	$\sup M$	M 的上确界 supremum of M	一个有上界非空数集的最小上界。
2-10.16	$ a $	a 的绝对值, a 的模, a 的大小 absolute value of a , modulus of a , magnitude of a	也可以使用符号abs a 。 也可以使用符号 来表示集合的基数 (参阅 2-6.5项)、复数的模(2-15.4项)和向量的大小(参阅 2-18.4项)。
2-10.17	$[a]$	a 的下取整, 小于等于实数 a 的最大整数 floor a , the greatest integer less than or equal to the real number a	也可以使用符号ent a 。 示例 $[2,4] = 2$ $[-2,4] = -3$
2-10.18	$\lceil a \rceil$	a 的上取整, 大于等于实数 a 的最小整数 ceil a , the least integer greater than or equal to the real number a	“ceil”是英文单词“ceiling”的缩写。 示例 $\lceil 2,4 \rceil = 3$ $\lceil -2,4 \rceil = -2$
2-10.19	$\text{int } a$	实数 a 的整数部分 integer part of the real number a	$\text{int } a = \text{sgn } a \cdot [a]$ 示例 $\text{int}(2,4) = 2$ $\text{int}(-2,4) = -2$
2-10.20	$\text{frac } a$	实数 a 的小数部分 fractional part of the	$\text{frac } a = a - \text{int } a$ 示例

		real number a	$\text{frac}(2,4) = 0,4$ $\text{frac}(-2,4) = -0,4$
2-10.21	$\min(a, b)$	a 和 b 的最小值 minimum of a and b	该运算可推广为两个以上的数字和数集。然而，一个无限的数集不需要有一个最小的元素，在这种情况下使用 \inf （参阅 2-10.14 项）。
2-10.22	$\max(a, b)$	a 和 b 的最大值 maximum of a and b	该运算可推广为两个以上的数字和数集。然而，一个无限的数集不需要有一个最大的元素，在这种情况下使用 \sup （参阅 2-10.15 项）。

11. 组合数学

在本条目中， n 和 k 是自然数，其中 $k \leq n$ 。

表 7 — 组合数学中的符号和表示

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-11.1	$n!$	阶乘 factorial	$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ($n > 0$) $0! = 1$
2-11.2	$a^{\underline{k}}$	递降阶乘 falling factorial	$a^{\underline{k}} = a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1)$ ($k > 0$) $a^{\underline{0}} = 1$ a 可以是一个复数。 对于自然数 n 来说： $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ 在组合数学和统计学中，符号 $(a)_k$ 经常用于递降阶乘。然而在特殊函数论中，相同的符号经常用于递进阶乘，称为 Pochhammer 符号。
2-11.3	$a^{\overline{k}}$	递进阶乘 rising factorial	$a^{\overline{k}} = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+k-1)$ ($k > 0$) $a^{\overline{0}} = 1$ a 可以是一个复数。 对于自然数 n 来说： $n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ 在特殊函数论中，符号 $(a)_k$ 经常用于递进阶乘，称为 Pochhammer 符号。然而在组合数学和统计学中，相同的符号经常用于递降阶乘。
2-11.4	$\binom{n}{k}$	二项式系数 binomial coefficient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ($0 \leq k \leq n$)

2-11.5	B_n	伯努利数 Bernoulli numbers	$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad (n > 0)$ $B_0 = 1$ $B_1 = -1/2, B_{2n+3} = 0$
2-11.6	C_n^k	不重复组合数 number of combinations without repetition	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2-11.7	${}^R C_n^k$	重复组合数 number of combinations with repetition	${}^R C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$
2-11.8	V_n^k	不重复排列数 number of variations without repetition	$V_n^k = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ 当 $n = k$ 时, 用术语“排列”表示。
2-11.9	${}^R V_n^k$	重复排列数 number of variations with repetition	${}^R V_n^k = n^k$

12. 函数

2-12.1 至 2-12.13 项涉及一般函数, 2-12.14 至 2-12.27 项涉及微积分中使用的以数字作为值的函数。

表 8 — 函数的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-12.1	f, g, h, \dots	函数 functions	函数为其定义域内的任意参数赋值值域内的唯一值。参数被函数映射到值上, 这些值被称作参数在函数下的像。
2-12.2	$f(x)$ $f(x_1, \dots, x_n)$	参数 x 及参数 (x_1, \dots, x_n) 在函数 f 下的值 value of function f for argument x or for argument x_1, \dots, x_n , respectively	当一个函数的定义域有 n 个自变量时, 该函数为 n 元组函数。
2-12.3	$\text{dom} f$	函数 f 的定义域 domain of f	函数 f 赋值对象的集合。也用 $D(f)$ 表示。
2-12.4	$\text{ran} f$	函数 f 的值域	函数 f 的值的集合。

		range of f	也用 $R(f)$ 表示。
2-12.5	$f: A \rightarrow B$	函数 f 是从A到B的映射 f maps A into B	$\text{dom}f = A$ 且 $\text{ran}f \subseteq B$ B的所有元素不一定是函数 f 的值。
2-12.6	$f: A \twoheadrightarrow B$	函数 f 是从A到B的满射 f maps A surjectively onto B	$\text{dom}f = A$ 且 $\text{ran}f = B$
2-12.7	$f: A \mapsto B$	函数 f 是从A到B的单射 f maps A injectively into B	$f: A \rightarrow B$ 并且对于所有的 $x, y \in A$ 如果 $x \neq y$, 则 $f(x) \neq f(y)$ 函数 f 被称作单射或一对一函数。
2-12.8	$f: AB$	函数 f 是从A到B的双射 f maps A bijectively onto B	$f: A \twoheadrightarrow B$ 且 $f: A \mapsto B$
2-12.9	$x \mapsto T(x), x \in A$	函数将任意 $x \in A$ 映射到 $T(x)$ function that maps any $x \in A$ onto $T(x)$	$T(x)$ 是一个定义术语, 表示参数 $x \in A$ 在某个函数下的值。 如果称该函数为 f , 则对任意 $x \in A$ 成立 $f(x) = T(x)$ 。因此定义术语 $T(x)$ 经常用来表示函数 f 。 示例 $x \mapsto 3x^2y, x \in [0,2]$ 这是由项 $3x^2y$ 在规定的区间上定义的二次函数 (关于 x 取决于参数 y)。 若未引入函数符号, 则用项 $3x^2y$ 来表示该函数。
2-12.10	f^{-1}	f 的逆函数 inverse function of f	只有当 f 是单射时才能定义函数 f 的逆函数 f^{-1} 。 若 f 是单射的则 $\text{dom}(f^{-1}) = \text{ran}(f)$, $\text{ran}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$, 并且 $f^{-1}(f(x)) = x$ 对 $x \in \text{dom}f$ 。 注意区分逆函数 f^{-1} 与逐点倒数函数 $x \mapsto f(x)^{-1}$ 。
2-12.11	$g \circ f$	f 和 g 的复合函数, g 复合 f Composite function of f and g , g circle f	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 在复合函数 $g \circ f$ 中, 函数 g 作用于函数 f 作用的结果。

2-12.12	f $x \rightarrow y$ $f: x \mapsto y$	$f(x) = y$, f 将 x 映射到 y f maps x onto y	示例 $\pi \xrightarrow{\cos} -1$
2-12.13	$f _a^b$ $f(\dots, u, \dots) _{u=a}^{u=b}$	$f(b) - f(a)$ $f(\dots, b, \dots) - f(\dots, a, \dots)$	该表示法主要用于求定积分。
2-12.14	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	当 x 趋近于 a 时 $f(x)$ 的极限 limit of $f(x)$ as x tends to a	$f(x) \rightarrow b$ 当 $x \rightarrow a$ 时 可以写成 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 。 极限“从右侧趋近”(x > a)和“从左侧趋近”(x < a)可以分别表示为 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 。
2-12.15	$f(x)$ $= O(g(x))$	$f(x)$ 是 $g(x)$ 的大O表示形式, 当逼近给出的极限时 $ f(x)/g(x) $ 有上界, $f(x)$ 的阶等同于或低于 $g(x)$ 。 $f(x)$ is upper case O of $g(x)$, $ f(x)/g(x) $ is bounded from above in the limit implied by the context, $f(x)$ is of the order comparable with or inferior to $g(x)$	这里使用“=”符号是出于历史原因使用的, 不具有相等的含义, 因为不适用传递性。 示例 $\sin x = O(x)$, 当 $x \rightarrow 0$
2-12.16	$f(x)$ $= o(g(x))$	$f(x)$ 是 $g(x)$ 的小o表示形式当逼近给出的极限时 $f(x)/g(x) \rightarrow 0$, $f(x)$ 的阶低于 $g(x)$ 。 $f(x)$ is lower case o of $g(x)$, $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ in the limit implied by the context, $f(x)$ is of the order inferior to $g(x)$	这里使用“=”符号是出于历史原因使用的, 不具有相等的含义, 因为不适用传递性。 示例 $\cos x = 1 + o(x)$, 当 $x \rightarrow 0$
2-12.17	Δf	德尔塔 f , f 的有限增量 delta f , finite increment of f	给出的两个函数值的差。 示例 $\Delta x = x_2 - x_1$ $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$
2-12.18	$\frac{df}{dx}$ df/dx f' Df	f 对 x 求导 derivative of f with respect to x	仅用于单变量函数。 也可表示自变量, 例如 $\frac{df(x)}{dx}$, $df(x)/dx$, $f'(x)$ and $Df(x)$ 。 如果自变量是时间 t , 也用 \dot{f} 表示 f' 。

2-12.19	$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ $(df/dx)_{x=a}$ $f'(a)$ $Df(a)$	当 $x = a$ 时 f 的导数值 value of the derivative of f for $x = a$	另请参阅 2-12.18
2-12.20	$\frac{d^n f}{dx^n}$ $d^n f/dx^n$ $f^{(n)}$ $D^n f$	f 对 x 求 n 阶导 n^{th} derivative of f with respect to x	仅用于单变量函数。 也能使用 $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $d^n f(x)/dx^n$, $f^{(n)}(x)$ 和 $D^n f(x)$ 。 f'' 和 f''' 也分别用来表示 $f^{(2)}$ 和 $f^{(3)}$ 。 如果自变量是时间 t , 也用 \ddot{f} 表示 f'' 。
2-12.21	$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\partial f/\partial x$ $\partial_x f$	f 对 x 求偏导 partial derivative of f with respect to x	只用于多变量函数。 也可使用 $\frac{\partial f(x,y,\dots)}{\partial x}$, $\partial f(x,y,\dots)/\partial x$, $\partial_x f(x,y,\dots)$ 和 $D_x f(x,y,\dots)$ 。 其他自变量可以用下标表 示, 例如 $(\frac{\partial f}{\partial x})_{y\dots}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 也可使用其他表示法, 如 $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 。
2-12.22	df	f 的全微分 total differential of f	$df(x,y,\dots) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ $+ \dots$
2-12.23	δf	f 的(无穷小)变分 (infinitesimal) variation of f	该符号被用于变分计算。
2-12.24	$\int f(x)dx$	f 的不定积分 indefinite integral of f	
2-12.25	$\int_a^b f(x)dx$	f 从 a 到 b 的定积分 definite integral of f from a to b	这是一个定义在区间上的函数的简单情况。也可以定义在更广泛域上定义的函数的积分。特殊的表示法, 例如 \int_C , \int_S , \int_V , \oint , 分别用于曲线 C , 曲面 S , 三维域 V 以及封闭曲线或曲面的积分。

			也用 \iint , \iiint 表示多重积分。
2-12.26	$\int_a^b f(x)dx$	在 c 处具有奇点的 f 的柯西主值积分, 其中 $a < c < b$ Cauchy principal value of the integral of f with singularity at c , where $a < c < b$	$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right)$
2-12.27	$\int_a^b f(x)dx$	f 的柯西主值积分 Cauchy principal value of the integral of f	$\int_a^b f(x)dx$ 参阅 2-12.26.

13. 指数函数和对数函数

可使用复参数, 特别是对于底数 e 。

表 9 — 指数函数和对数函数的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-13.1	e	自然对数的底数 base of natural logarithm	$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,7188128 \dots$ 该数称为欧拉数。
2-13.2	a^x	a 的 x 次方, 以 a 为底, x 为参数的指数函数 a to the power of x , exponential function to the base a of argument x	另请参阅 2-10.9。
2-13.3	e^x	e 的 x 次方, 以 e 为底, x 为参数的指数函数 e to the power of x , exponential function to the base e of argument x	另请参阅 2-15.5。
2-13.4	$\log_a x$	以 a 为底 x 的对数 logarithm to the base a of argument x	当无需指明底数时, 使用 $\log x$ 。
2-13.5	$\ln x$	x 的自然对数 natural logarithm of x	$\ln x = \log_e x$ $\log x$ 不能代替 $\ln x$, $\lg x$, $\text{lb } x$, 或是 $\log_e x$, $\log_{10} x$, $\log_2 x$ 。
2-13.6	$\lg x$	x 的十进制对数, x 的常用对数 decimal logarithm of x , common logarithm of x	$\lg x = \log_{10} x$ 参阅 2-13.5 的备注。

2-13.7	$\text{lb } x$	x 的二进制对数 binary logarithm of x	$\text{lb } x = \log_2 x$ 参阅 2-13.5 的备注
--------	----------------	---------------------------------------	--

14. 三角函数和双曲函数

表 10 — 三角函数和双曲函数的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-14.1	π	圆的周长与其直径之比 ratio of the circumference of a circle to its diameter	$\pi = 3,1415926 \dots$
2-14.2	$\sin x$	x 的正弦 sine of x	$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$ $(\sin x)^n, (\cos x)^n$ 等。(当 $n \geq 2$ 时), 写作 $\sin^n x, \cos^n x$ 等。
2-14.3	$\cos x$	x 的余弦 cosine of x	$\cos x = \sin(x + \pi/2)$
2-14.4	$\tan x$	x 的正切 tangent of x	$\tan x = \sin x / \cos x$ 不使用 $\text{tg } x$ 。
2-14.5	$\cot x$	x 的余切 cotangent of x	$\cot x = 1 / \tan x$ 不使用 $\text{ctg } x$ 。
2-14.6	$\sec x$	x 的正割 secant of x	$\sec x = 1 / \cos x$
2-14.7	$\csc x$	x 的余割 cosecant of x	$\csc x = 1 / \sin x$ 也可写作 $\text{cosec } x$ 。
2-14.8	$\arcsin x$	x 的反正弦 arcus sine of x	$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,$ $(-\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$ 反正弦函数是正弦函数在上述 限制条件下的反函数。
2-14.9	$\arccos x$	x 的反余弦 arcus cosine of x	$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y,$ $(0 \leq y \leq \pi)$ 反余弦函数是余弦函数在上述 限制条件下的反函数。
2-14.10	$\arctan x$	x 的反正切 arcus tangent of x	$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y,$ $(-\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$ 反正切函数是正切函数在上述 限制条件下的反函数。 不应使用 $\text{arctg } x$ 。
2-14.11	$\text{arccot } x$	x 的反余切 arcus cotangent of x	$y = \text{arccot } x \Leftrightarrow x = \cot y,$ $(0 \leq y \leq \pi)$ 反余切函数是余切函数在上述 限制条件下的反函数。 不使用 $\text{arcctg } x$ 。
2-14.12	$\text{arcsec } x$	x 的反正割	$y = \text{arcsec } x \Leftrightarrow x = \sec y,$

		arcus secant of x	$(0 \leq y \leq \pi, y \neq \pi/2)$ 反正割函数是正割函数在上述限制条件下的反函数。
2-14.13	$\operatorname{arccsc} x$	x 的反余割 arcus cosecant of x	$y = \operatorname{arccsc} x \Leftrightarrow x = \csc y,$ $(-\pi/2 \leq y \leq \pi/2, y \neq 0)$ 反余割函数是余割函数在上述限制条件下的反函数。 避免使用 $\operatorname{arccosec} x$ 。
2-14.14	$\sinh x$	x 的双曲正弦 hyperbolic sine of x	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\sinh x = x + x^3/3! + \dots$ 避免使用 $\operatorname{sh} x$ 。
2-14.15	$\cosh x$	x 的双曲余弦 hyperbolic cosine of x	$\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1$ 避免使用 $\operatorname{ch} x$ 。
2-14.16	$\tanh x$	x 的双曲正切 hyperbolic tangent of x	$\tanh x = \sinh x / \cosh x$ 避免使用 $\operatorname{th} x$ 。
2-14.17	$\operatorname{coth} x$	x 的双曲余切 hyperbolic cotangent of x	$\operatorname{coth} x = 1/\tanh x$
2-14.18	$\operatorname{sech} x$	x 的双曲正割 hyperbolic secant of x	$\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$
2-14.19	$\operatorname{csch} x$	x 的双曲余割 hyperbolic cosecant of x	$\operatorname{csch} x = 1/\sinh x$ 避免使用 $\operatorname{cosech} x$ 。
2-14.20	$\operatorname{arsinh} x$	x 的反双曲正弦 inverse hyperbolic sine of x , area hyperbolic sine of x	$y = \operatorname{arsinh} x \Leftrightarrow x = \sinh y$ 反双曲正弦函数是双曲正弦函数的反函数。 避免使用 $\operatorname{arsh} x$ 。
2-14.21	$\operatorname{arcosh} x$	x 的反双曲余弦 inverse hyperbolic cosine of x , area hyperbolic cosine of x	$y = \operatorname{arcosh} x \Leftrightarrow x = \cosh y$ $(y \geq 0)$ 反双曲余弦函数是双曲余弦函数在上述限制条件下的反函数。 避免使用 $\operatorname{arch} x$ 。
2-14.22	$\operatorname{artanh} x$	x 的反双曲正切 inverse hyperbolic tangent of x , area hyperbolic tangent of x	$y = \operatorname{artanh} x \Leftrightarrow x = \tanh y$ 反双曲正切函数是双曲正切函数的反函数。 避免使用 $\operatorname{arth} x$ 。
2-14.23	$\operatorname{arcoth} x$	x 的反双曲余切 inverse hyperbolic cotangent of x , area hyperbolic cotangent of x	$y = \operatorname{arcoth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{coth} y$ $(y \neq 0)$ 反双曲余切函数是双曲余切函数在上述限制条件下的反函数。
2-14.24	$\operatorname{arsech} x$	x 的反双曲正割 inverse hyperbolic secant of x , area hyperbolic	$y = \operatorname{arsech} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y$ $(y \geq 0)$ 反双曲正割函数是双曲正割函

		secant of x	数在上述限制条件下的反函数。
2-14.25	arcsch x	x 的反双曲余割 inverse hyperbolic cosecant of x , area hyperbolic cosecant of x	$y = \operatorname{arcsch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{csch} y$ ($y \geq 0$) 反双曲余割函数是双曲余割函数在上述限制条件下的反函数。 避免使用 $\operatorname{arcosech} x$ 。

15. 复数

表 11 — 复数的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-15.1	i j	虚数单位 imaginary unit	$i^2 = j^2 = -1$ 在数学和物理学中使用符号“ i ”, 在电工学中使用符号“ j ”。
2-15.2	$\operatorname{Re} z$	z 的实部 real part of z	若 $z = x + iy$, x 和 y 是实数, 则 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ 。
2-15.3	$\operatorname{Im} z$	z 的虚部 imaginary part of z	参阅 2-15.2。
2-15.4	$ z $	z 的模 modulus of z	$ z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 其中 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ 。 符号 $ $ 也用来表示集合的基数(参阅 2-6.5)、实数的绝对值(参阅 2-10.16), 和向量的大小(参阅 2-18.4)。 $ z = \sqrt{x^2 + y^2}$
2-15.5	$\arg z$	z 的辐角 argument of z	若 $z = re^{i\varphi}$, $r = z $ 且 $-\pi < \varphi \leq \pi$, 则 $\varphi = \arg z$ 。 满足 $\operatorname{Re} z = r \cos \varphi$ 和 $\operatorname{Im} z = r \sin \varphi$ 。
2-15.6	\bar{z} z^*	z 的复共轭 complex conjugate of z	$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z$ 符号“ \bar{z} ”主要用于数学领域, 符号“ z^* ”主要用于物理学和工程学领域。
2-15.7	$\operatorname{sgn} z$	z 的单位模函数 signum z	$\operatorname{sgn} z = z/ z = \exp(i \arg z)$ ($z \neq 0$) $\operatorname{sgn} z = 0$ 当 $z = 0$ 时 另请参阅 2-10.13。有时未定义 $\operatorname{sgn} 0$ 。

16. 矩阵

矩阵通常使用加粗斜体大写字母书写, 矩阵中的元素使用淡斜体小写字母书写, 但也可以使用其他字体。

表 12 — 矩阵的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
----	---------	-------	-------

2-16.1	\mathbf{A} $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$ 型的矩阵 \mathbf{A} matrix \mathbf{A} of type m by n	\mathbf{A} 是包含元素 $a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}$ 的矩阵， 其中 m 是行数， n 是列数。 也使用 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 。 也可以使用方括号代替圆括号。
2-16.2	$\mathbf{A} + \mathbf{B}$	矩阵 \mathbf{A} 和矩阵 \mathbf{B} 的和 sum of matrices \mathbf{A} and \mathbf{B}	$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij}$ 矩阵 \mathbf{A} 和矩阵 \mathbf{B} 必须有相同的列数 和相同的行数。
2-16.3	$x\mathbf{A}$	标量 x 和矩阵 \mathbf{A} 的乘积 product of scalar x and matrix \mathbf{A}	$(x\mathbf{A})_{ij} = x(\mathbf{A})_{ij}$
2-16.4	\mathbf{AB}	矩阵 \mathbf{A} 和矩阵 \mathbf{B} 的乘积 product of matrices \mathbf{A} and \mathbf{B}	$(\mathbf{AB})_{ik} = \sum_j (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{B})_{jk}$ \mathbf{A} 的列数必须等于 \mathbf{B} 的行数。
2-16.5	\mathbf{I} \mathbf{E}	单位矩阵 identity matrix	满足 $(\mathbf{I})_{ik} = \delta_{ik}$ 的方针 关于 δ_{ik} 的定义，参阅 2-18.9。
2-16.6	\mathbf{A}^{-1}	方阵 \mathbf{A} 的逆 inverse of a square matrix \mathbf{A}	$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ， 当 $\det \mathbf{A} \neq 0$ 时，关于 $\det \mathbf{A}$ 的定 义，参阅 2-16.10。
2-16.7	\mathbf{A}^T	\mathbf{A} 的转置矩阵 transpose matrix of \mathbf{A}	$(\mathbf{A}^T)_{ik} = (\mathbf{A})_{ki}$
2-16.8	$\bar{\mathbf{A}}$ \mathbf{A}^*	\mathbf{A} 的复共轭矩阵 complex conjugate matrix of \mathbf{A}	$(\bar{\mathbf{A}})_{ik} = \overline{(\mathbf{A})_{ik}}$ 在数学中使用符号“ $\bar{\mathbf{A}}$ ”， 在物理学和电工学中使用符号 “ \mathbf{A}^* ”。
2-16.9	\mathbf{A}^H	\mathbf{A} 的厄米特共轭矩阵 Hermitian conjugate matrix of \mathbf{A}	$\mathbf{A}^H = (\bar{\mathbf{A}})^T$ 又称“伴随矩阵”。 可以使用 \mathbf{A}^* 和 \mathbf{A}^+ 来表示 \mathbf{A}^H 。
2-16.10	$\det \mathbf{A}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	方阵 \mathbf{A} 的行列式 determinant of a square matrix \mathbf{A}	有时使用 $ \mathbf{A} $ 。
2-16.11	$\text{rank } \mathbf{A}$	矩阵 \mathbf{A} 的秩 rank of matrix \mathbf{A}	矩阵 \mathbf{A} 的秩是 \mathbf{A} 的线性无关的行 数。也等于线性无关的列数。
2-16.12	$\text{tr} \mathbf{A}$	方阵 \mathbf{A} 的迹 trace of a square matrix \mathbf{A}	$\text{tr} \mathbf{A} = \sum_i (\mathbf{A})_{ii}$
2-16.13	$\ \mathbf{A}\ $	矩阵 \mathbf{A} 的范数 norm of matrix \mathbf{A}	矩阵 \mathbf{A} 的范数是表征该矩阵的、满 足三角不等式的数： 若 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ ，则 $\ \mathbf{A}\ + \ \mathbf{B}\ \geq$ $\ \mathbf{C}\ $ 。 可以使用不同的矩阵范数。

17. 坐标系

本节的主要内容为经典物理三维空间中的坐标系。在坐标系中，点O被固定为原点。任意点P都是由原点O到点P的**位置向量**决定的。

表 13 — 三维空间中的坐标系

项号	坐标	位置向量及其微分	坐标系名称	备注
2-17.1	x, y, z	$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ $d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$	笛卡尔坐标 Cartesian coordinates	基向量 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 组成正交系（向量是单位向量并且是正交的），见图 1 和图 4。 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 或 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 可用于表示基向量。 x_1, x_2, x_3 或 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 可用于表示坐标系。
2-17.2	ρ, φ, z	$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$ $d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z$	圆柱坐标 cylindrical coordinates	$\mathbf{e}_\rho(\varphi), \mathbf{e}_\varphi(\varphi), \mathbf{e}_z$ 组成正交右手系，见图 2。 若 $z = 0$ ，则 ρ 和 φ 为平面极坐标。
2-17.3	r, ϑ, φ	$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\vartheta\mathbf{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$	球坐标 spherical coordinates	$\mathbf{e}_r(\theta, \varphi), \mathbf{e}_\theta(\theta, \varphi), \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ 组成正交右手系，见图 3。
注：若使用左手坐标系（见图 5）替代右手坐标系（见图 4），应明确说明，以避免造成符号错误。				

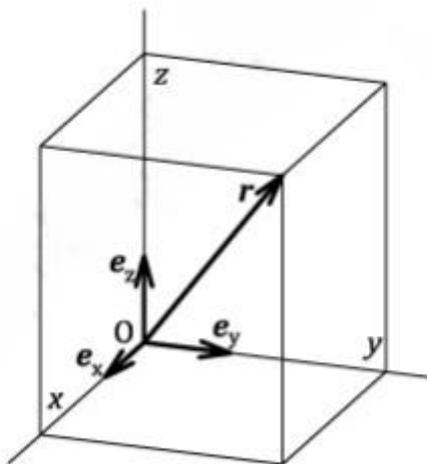


图 1 — 右手笛卡尔坐标系

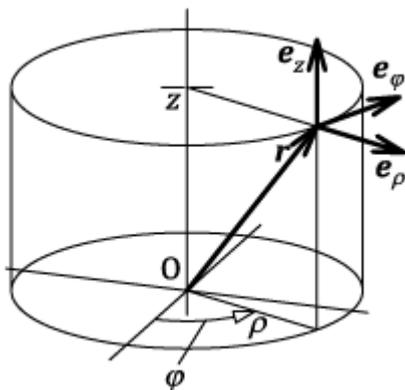


图 2 — 右手圆柱坐标系

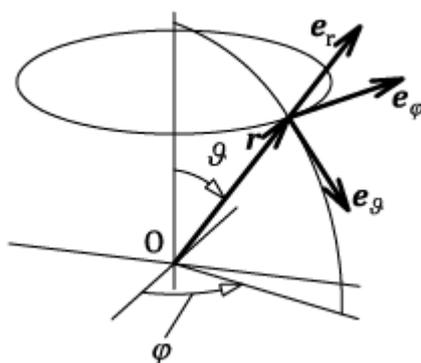


图 3 — 右手球坐标系

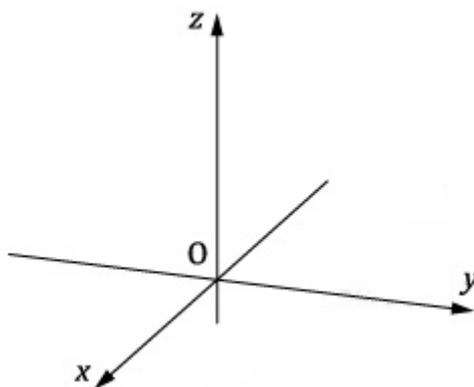


图 4 — 右手坐标系

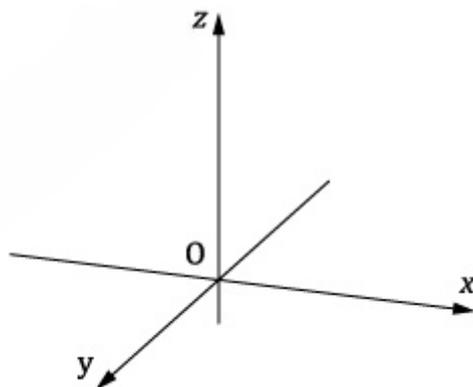


图 5 — 左手坐标系

18. 标量，向量和张量

在本节中，使用 e_1, e_2, e_3 表示基向量。该表示法适用于 n 维空间（ n 为自然数，不一定是3）。在数学和物理学中， n 维空间是不可或缺的。本节中的多个概念适用于广泛领域。空间维度的数学概念比质量维度的概念更具普适性，详见 ISO 80000-1。

标量、向量和张量均为数学对象，用来表示物理量及其数值。它们本身不受坐标系类型的影响，但向量或张量的每个标量分量、向量分量以及张量分量取决于坐标系选择。向量是一阶张量，标量是零阶张量。

关于基向量 e_1, e_2, e_3 ，每一个向量 a 可以表示为 $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ ，其中 a_1, a_2 和 a_3 是唯一确定的标量值，称为向量相对于基向量的“坐标”， $a_1 e_1, a_2 e_2$ 和 $a_3 e_3$ 被称作相对于基向量的向量的“向量分量”。

通常，不单独使用“分量”一词，以避免与“向量分量”产生混淆。

向量可以用“数字向量乘以单位”表示，而不是把向量的坐标看作物理量值（数乘以单位），所有的单位都是标量。

举例 作用于给定粒子上的力，例如，笛卡尔坐标系分量 $(F_x; F_y; F_z) = (-31,5; 43,2; 17,0)$ N。

以上方法同样适用于二阶或更高阶张量。

在本节，只讨论普通空间中的笛卡尔（直角）坐标系，需要协变和逆变表示的其它情况不做讨论。笛卡尔坐标系可以用 x, y, z ； a_1, a_2, a_3 或 x_1, x_2, x_3 表示。

若使用下标 i, j, k, l （1至3），则可使用以下求和约定：如果一个下标在单项中出现两次，可以对该下标进行求和，符号 Σ 可忽略。

通常，使用通用符号表示向量和张量的标量分量，例如，使用符号“ a_i ”表示向量，符号“ T_{ij} ”表示二阶张量，符号“ $a_i b_j$ ”表示并向量积。

表 14 — 标量，向量和张量的符号和表达式

项号	符号，表达式	意义或读法	备注及示例
2-18.1	a \vec{a}	向量 a vector a	可以用字母符号上方的箭头代替黑体字来表示向量。
2-18.2	$a + b$	向量 a 和 b 相加 sum of vectors a and b	$(a + b)_i = a_i + b_i$
2-18.3	xa	向量 a 和一个数、标量	$(xa)_i = xa_i$

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
		或分量 x 的乘积 product of a number, scalar, or component x and vector \mathbf{a}	
2-18.4	$ \mathbf{a} $	向量 \mathbf{a} 的大小 向量 \mathbf{a} 的范数 magnitude of the vector \mathbf{a} , norm of the vector \mathbf{a}	$ \mathbf{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ 也可使用 $\ \mathbf{a}\ $ 。 符号 $ $ 表示集合基数(见2-6.5)、 实数的绝对值(见2-10.16)、复数 的模(2-15.4)。
2-18.5	$\mathbf{0}$ $\vec{0}$	零向量 zero vector	零向量的大小为0。
2-18.6	\mathbf{e}_a $\hat{\mathbf{a}}$	向量 \mathbf{a} 方向上的单位向 量 unit vector in the direction of \mathbf{a}	$\mathbf{e}_a = \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/ \mathbf{a} $, (当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时)
2-18.7	$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	笛卡尔坐标系坐标轴方 向上的单位向量 unit vectors in the directions of the Cartesian coordinate axes	也可使用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示。
2-18.8	a_x, a_y, a_z a_i	向量 \mathbf{a} 的笛卡尔坐标 向量 \mathbf{a} 的笛卡尔坐标分 量 Cartesian coordinates of vector \mathbf{a} , Cartesian components of vector \mathbf{a}	$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$ $a_1 \mathbf{e}_1, a_2 \mathbf{e}_2, a_3 \mathbf{e}_3$ 为向量分量。若明 确设定基向量, 向量可表达为 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 。 $a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x, a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y, a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z$ $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ 是坐标为 x, y, z 的点的位置向量(矢径)。
2-18.9	δ_{ik}	克罗内克 δ 符号 Kronecker delta symbol	$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$
2-18.10	ε_{ijk}	列维-奇维塔符号 Levi-Civita symbol	$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ 其他所有 ε_{ijk} 均等于0。
2-18.11	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的标量积 scalar product of \mathbf{a} and \mathbf{b}	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \mathbf{a} ^2 = a^2$ 在特殊领域, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) 或 $\langle a, b \rangle$ 也被用 来表示内积。
2-18.12	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的向量积 vector product of \mathbf{a}	在右手笛卡尔坐标系中, 向量积的 坐标是

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
		and \mathbf{b}	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y = a_z b_x - a_x b_z$ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ 见 2-18. 10。
2-18. 13	∇ $\vec{\nabla}$	梯度算子 nabla operator	$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ $= \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 该算子又称“del”算子。
2-18. 14	$\nabla \varphi$ $\mathbf{grad} \varphi$	φ 的梯度 gradient of φ	$\nabla \varphi = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ 算子 \mathbf{grad} 使用黑体表示。
2-18. 15	$\nabla \cdot \mathbf{a}$ $\mathbf{div} \mathbf{a}$	向量 \mathbf{a} 的散度 divergence of \mathbf{a}	$\nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ 算子 \mathbf{div} 使用黑体表示。
2-18. 16	$\nabla \times \mathbf{a}$ $\mathbf{rot} \vec{\mathbf{a}}$	向量 \mathbf{a} 的旋度 rotation of \mathbf{a}	坐标为 $(\nabla \times \mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$ $(\nabla \times \mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$ $(\nabla \times \mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$ 避免算子 \mathbf{curl} , 算子 \mathbf{rot} 应使用黑体表示。 $(\nabla \times \mathbf{a})_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$ 见 2-18. 10。
2-18. 17	∇^2 Δ	拉普拉斯 Laplacian	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
2-18. 18	\square	达朗贝尔 d'Alembertian	$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 其中, 独立变量 t 代表时间 (ISO 80000-3), c 代表光速 (ISO 80000-3)。
2-18. 19	\mathbf{T} $\vec{\vec{T}}$	二阶张量 \mathbf{T} tensor \mathbf{T} of the second order	可以用字母符号上方的两个箭头代替黑体无衬线字体来表示二阶张量。
2-18. 20	$T_{xx}, T_{xy}, \dots, T_{zz}$ $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{33}$	张量 \mathbf{T} 的笛卡尔坐标 张量 \mathbf{T} 的笛卡尔分量 Cartesian coordinates	基于基张量 $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y, \dots, \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$ 的张量 \mathbf{T} 的表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
		of tensor T , Cartesian components of tensor T	$T = T_{xx}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + T_{xy}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y + \dots$ $+ T_{zz}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ 中的标量 $T_{xx}, T_{xy}, \dots, T_{zz}$ 。 $T_{xx}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x, T_{xy}\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y, \dots, T_{zz}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$ 是张量 分量。 如果基向量已知, 张量可以写为 $T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}。$
2-18.21	$\mathbf{a}\mathbf{b}$ $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$	并向量积 向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的张量积 dyadic product, tensor product of two vectors \mathbf{a} and \mathbf{b}	二阶张量坐标 $(\mathbf{a}\mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$
2-18.22	$\mathbf{T}\otimes\mathbf{S}$	二阶张量 \mathbf{T} 和 \mathbf{S} 的张量 积 tensor product of two tensors \mathbf{T} and \mathbf{S} of the second order	四阶张量坐标 $(\mathbf{T}\otimes\mathbf{S})_{ijkl} = T_{ij}S_{kl}$
2-18.23	$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$	二阶张量 \mathbf{T} 和 \mathbf{S} 的内积 inner product of two tensors \mathbf{T} and \mathbf{S} of the second order	二阶张量坐标 $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})_{ik} = \sum_j T_{ij}S_{jk}$
2-18.24	$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$	二阶张量 \mathbf{T} 和向量 \mathbf{a} 的 内积 inner product of a tensor \mathbf{T} of the second order and a vector \mathbf{a}	坐标向量 $(\mathbf{T} \cdot \mathbf{a})_i = \sum_j T_{ij}a_j$
2-18.25	$\mathbf{T}:\mathbf{S}$	二阶张量 \mathbf{T} 和 \mathbf{S} 的标量 积 scalar product of two tensors \mathbf{T} and \mathbf{S} of the second order	标量值 $\mathbf{T}:\mathbf{S} = \sum_i \sum_j T_{ij}S_{ij}$

19. 变换

表 15 — 变换的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-19.1	$\mathcal{F}f$	f 的傅里叶变换 Fourier transform of f	$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$ (其中 $\omega \in \mathbf{R}$) 常用 $\mathcal{F}(\omega)$ 表示。

			也可表示为: $(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$ 。
2-19.2	$\mathcal{L}f$	f 的拉普拉斯变换 Laplace transform of f	$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ (其中 $s \in \mathbf{C}$) 常用 $\mathcal{L}(s)$ 表示。 可运用双边的拉普拉斯变换, 使用相同的公式定义, 但用负无穷代替零。
2-19.3	$\mathfrak{Z}(a_n)$	(a_n) 的Z变换 Z transform of (a_n)	$\mathfrak{Z}(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ (其中 $z \in \mathbf{C}$) 算子 \mathfrak{Z} 作用在序列 (a_n) 上, 而不是作用在函数 a_n 上。 也可使用双边的Z变换, 使用相同的公式定义, 但用负无穷代替零。
2-19.4	$H(x)$ $\vartheta(x)$	亥维赛函数, 单位阶跃函数 Heaviside function, unit step function	$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $H(0) \in [0,1]$, 取决于应用领域。 也可使用 $U(x)$ 。 $\vartheta(t)$ 用来表示关于时间的单位阶跃函数。 例子 $(\mathcal{L}H)(s) = 1/s \quad (\text{Re } s > 0)$
2-19.5	$\delta(x)$	狄拉克 δ 分布, 狄拉克 δ 函数 Dirac delta distribution, Dirac delta function	狄拉克 δ 分布的定义如下 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t-x) dt = \varphi(x)$ 狄拉克 δ 分布可以理解为亥维赛函数的导数。 又称“单位脉冲”。 例子 $\mathcal{L}\delta = 1$ 见 2-19.6 项和 IEC 60027-6:2006 中 2.01 项。
2-19.6	$f * g$	函数 f 和 g 的卷积 convolution of f and g	$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$

20. 特殊函数

在本条目中, a, b, c, z, w, v 是复数, x 是实数, k, l, m, n 是自然数。

表 16 — 特殊函数的符号和表达式

项号	符号, 表达式	意义或读法	备注及示例
2-20.1	γ C	欧拉-马斯克若尼常数 Euler-Mascheroni constant	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,5772156 \dots$
2-20.2	$\Gamma(z)$	Γ (伽马)函数 gamma function	$\Gamma(z)$ 是亚纯函数, 极点是 $0, -1, -2, -3, \dots$ $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$ $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbf{N})$
2-20.3	$\zeta(z)$	黎曼泽塔函数 Riemann zeta function	$\zeta(z)$ 是亚纯函数, 极点是 $z = 1$ 。 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (\operatorname{Re} z > 1)$
2-20.4	$B(z, w)$	B(贝塔)函数 beta function	$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$ $(\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0)$ $B(z, w) = \Gamma(z)\Gamma(w)/\Gamma(z+w)$ $\frac{1}{(n+1)B(k+1, n-k+1)} = \binom{n}{k} \quad (k \leq n)$
2-20.5	Eix	指数积分 exponential integral	Eix = ... 参阅 2-12.26
2-20.6	lix	对数积分 logarithmic integral	$\operatorname{lix} = \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt \quad (0 < x < 1)$
2-20.7	Siz	正弦积分 sine integral	$\operatorname{Siz} = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$ $\operatorname{siz} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{Siz}$ 称作余正弦积分。
2-20.8	S(z) C(z)	菲涅尔积分 Fresnel integrals	$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$ $C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$
2-20.9	erf x	误差函数 error function	$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

			<p>$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$称作余误差函数。 在统计学中，使用分布函数</p> $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$
2-20.10	$F(\varphi, k)$	<p>第一类不完全椭圆积分 incomplete elliptic integral of the first kind</p>	$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}}$ <p>$k \in \mathbf{R}, 0 < k < 1$</p> <p>$K(k) = F(\frac{\pi}{2}, k)$表示第一类完全椭圆积分。</p>
2-20.11	$E(\varphi, k)$	<p>第二类不完全椭圆积分 incomplete elliptic integral of the second kind</p>	$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma} d\sigma$ <p>$k \in \mathbf{R}, 0 < k < 1$</p> <p>$E(k) = E(\frac{\pi}{2}, k)$表示第二类完全椭圆积分。</p>
2-20.12	$\Pi(n, \varphi, k)$	<p>第三类不完全椭圆积分 incomplete elliptic integral of the third kind</p>	$\Pi(n, \varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{(1 - n \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$ <p>$n, k \in \mathbf{R}, 0 < k < 1$</p> <p>$\Pi(n, k) = \Pi(n, \frac{\pi}{2}, k)$表示第三类完全椭圆积分。（有时第三类椭圆积分被定义为特征n的逆符号。）</p>
2-20.13	$F(a, b, c; z)$	<p>超几何函数 hypergeometric function</p>	$F(a, b, c; z) = \sum_0^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$ <p>$(-c \notin \mathbf{N})$ 关于$(a)_n, (b)_n$和$(c)_n$，参阅 2-11.3。 $z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]y' - aby = 0$ 的解。</p>
2-20.14	$F(a; c; z)$	<p>合流超几何函数 confluent hypergeometric function</p>	$F(a; c; z) = \sum_0^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n$ <p>$(-c \notin \mathbf{N})$ 关于$(a)_n$和$(c)_n$，参阅 2-11.3。 $zy'' + (c-z)y' - ay = 0$ 的解。</p>

2-20.15	$P_n(z)$	勒让德多项式 Legendre polynomial	$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$ ($n \in \mathbf{N}$) $(1 - z^2)y'' - 2zy' + n(n + 1)y = 0$ 的解。
2-20.16	$P_n^m(z)$	关联勒让德函数 associated Legendre function	$P_n^m(z) = (-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z)$ ($m, n \in \mathbf{N}, m \leq n$) $(1 - z^2)y'' - 2zy' + [n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2}]y = 0$ 的解。 因子 $(-1)^m$ 来自于球函数的一般理论。
2-20.17	$Y_l^m(\vartheta, \varphi)$	球谐函数 spherical harmonic	$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{(2l + 1)(l - m)!}{4\pi(l + m)!} \right]^{1/2} P_l^{ m }(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$ ($l, m \in \mathbf{N}; m \leq l$) $\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + l(l + 1)y = 0$ 的解。
2-20.18	$H_n(z)$	厄米特多项式 Hermite polynomial	$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$ ($n \in \mathbf{N}$) $y'' - 2zy' + 2ny = 0$ 的解。
2-20.19	$L_n(z)$	拉盖尔多项式 Laguerre polynomial	$L_n(z) = \frac{e^z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z})$ ($n \in \mathbf{N}$) $zy'' + (1 - z)y' + ny = 0$ 的解。
2-20.20	$L_n^m(z)$	关联拉盖尔多项式 associated Laguerre polynomial	$L_n^m(z) = (-1)^m \frac{d^m}{dz^m} L_n(z)$ ($m \in \mathbf{N}, m \leq n$) $zy'' + (m + 1 - z)y' + (n - m)y = 0$ 的解。
2-20.21	$T_n(z)$	第一类切比雪夫多项式 Chebyshev polynomial of the first kind	$T_n(z) = \cos n \arccos z$ ($n \in \mathbf{N}$) $(1 - z^2)y'' - zy' + n^2y = 0$ 的解。
2-20.22	$U_n(z)$	第二类切比雪夫多项式 Chebyshev polynomial of the second kind	$U_n(z) = \frac{\sin[(n + 1) \arccos z]}{\sin \arccos z}$ ($n \in \mathbf{N}$) $(1 - z^2)y'' - 3zy' + n(n + 2)y = 0$ 的解。

2-20. 23	$J_\nu(z)$	贝塞尔函数, 第一类柱函数 Bessel function, cylinder function of the first kind	$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$ ($\nu \in \mathbf{C}$) $z^2 y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0$ 的解。
2-20. 24	$N_\nu(z)$	诺依曼函数, 第二类柱贝塞尔函 数 Neumann function, cylinder Bessel function of the second kind	$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$ ($\nu \in \mathbf{C}$) 若 $\nu \in \mathbf{Z}$, 则方程的右侧使用极限值代 替。 也可以使用 $Y_\nu(z)$ 。
2-20. 25	$H_\nu^{(1)}(z)$ $H_\nu^{(2)}(z)$	汉克尔函数, 第三类柱贝塞尔函 数 Hankel function, cylinder Bessel function of the third kind	$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$ $H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z)$ ($\nu \in \mathbf{C}$)
2-20. 26	$I_\nu(z)$ $K_\nu(z)$	修正贝塞尔函数 modified Bessel function	$I_\nu(z) = e^{-1/2i\nu\pi} J_\nu(e^{1/2i\pi} z)$ $K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{1/2i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(e^{1/2i\pi} z)$ ($\nu \in \mathbf{C}$) $z^2 y'' + zy' - (z^2 + \nu^2)y = 0$ 的解
2-20. 27	$j_l(z)$	球贝塞尔函数 spherical Bessel function	$j_l(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+1/2}(z)$ ($l \in \mathbf{N}$) $z^2 y'' + 2zy' + [z^2 - l(l+1)]y = 0$ 的 解
2-20. 28	$n_l(z)$	球诺伊曼函数 spherical Neumann function	$n_l(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} N_{l+1/2}(z)$ ($l \in \mathbf{N}$) 也可以使用 $y_l(z)$ 。
2-20. 29	$h_l^{(1)}(z)$ $h_l^{(2)}(z)$	球汉克尔函数 spherical Hankel function	$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + in_l(z)$ $= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)$ $h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - in_l(z)$ $= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(z)$ 可以定义修正球贝塞尔函数 (类似于 2-20. 26), 分别表示为

			$i_l(z)$ 和 $k_l(z)$ 。
2-20.30	Ai(z) Bi(z)	艾里函数 Airy function	$\text{Ai}(z) = \frac{1}{3}\sqrt{z} \left[I_{-\frac{1}{3}}(w) - I_{\frac{1}{3}}(w) \right]$ $\text{Bi}(z) = \sqrt{\frac{z}{3}} \left[I_{-\frac{1}{3}}(w) + I_{\frac{1}{3}}(w) \right]$ <p>这里$w = \frac{2}{3}z^{3/2}$。</p> $y'' - zy = 0$ 的整解

参考文献

- [1] ISO 80000-3: 2006, *量和单位—第3部分: 空间和时间*
- [2] IEC 60027-6: 2006, *电气技术用字母符号—第6部分: 控制技术*